

## THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

### 1. Thông tin chung:

- Tên đề tài: **Một số tính chất về nghiệm của phương trình vi phân, đạo hàm riêng phân thứ**

- Mã số: B2023-TNA-14
- Chủ nhiệm đề tài: TS. Nguyễn Văn Thìn
- Tổ chức chủ trì: Đại học Thái Nguyên
- Thời gian thực hiện: 24 tháng

### 2. Mục tiêu:

- Phát triển được Lý thuyết Nevanlinna cho hàm và đường cong chỉnh hình. Cụ thể: thiết lập được một số dạng Định lý cơ bản thứ hai trong Lý thuyết Nevanlinna-Cartan, nghiên cứu ứng dụng của Lý thuyết Nevanlinna-Cartan trong phương trình vi phân đạo hàm riêng phức.

- Đưa ra được các điều kiện về sự tồn tại nghiệm, nghiệm chuẩn hóa, vấn đề cô đặc, cũng như sự bùng nổ của nghiệm của một số lớp phương trình đạo hàm riêng chứa toán tử không địa phương loại elliptic.

### 3. Tính mới và sáng tạo:

- Trong hướng nghiên cứu về Lý thuyết Nevanlinna cho hàm và đường cong chỉnh hình. Chúng tôi thiết lập một số dạng định lý cơ bản thứ hai và Bổ đề  $q$ -sai phân tương tự như Bổ đề đạo hàm logarit cho hàm phân hình nhiều biến. Ứng dụng các kết quả này, chúng tôi nghiên cứu hàm xấp xỉ Nevanlinna cho nghiệm của phương trình sai phân-đạo hàm riêng nhiều biến phức.

- Trong hướng nghiên cứu thứ hai, chúng tôi nghiên cứu về tính đa nghiệm, sự cô đặc của nghiệm, cũng như nghiệm chuẩn hóa cho bài toán kiểu Kirchhoff chứa toán tử  $p$ -Laplace phân thứ. Chúng tôi sử dụng phương pháp biến phân, Lý thuyết phạm trù Lusternik-Schnirelmann, phương pháp trên đa tạp Nehari, Lý thuyết các điểm tới hạn để nghiên cứu bài toán đặt ra. Đặc biệt lần đầu tiên, Lý thuyết phạm trù Lusternik-Schnirelmann được áp dụng nghiên cứu sự tồn tại đa nghiệm chuẩn hóa cho một lớp phương trình Elliptic với thế vị không âm. Chúng tôi cũng nghiên cứu sự tồn tại và tính bùng nổ nghiệm của phương trình truyền sóng phân thứ mà hàm phi tuyến có độ tăng mũ kiểu Trudinger-Moser trong trường hợp một chiều. Hơn nữa, kỹ thuật nghiên cứu tính đa nghiệm chuẩn hóa bằng cách sử dụng lý thuyết phạm trù, tính nổ của nghiệm của phương trình truyền sóng một chiều chứa toán tử Laplace phân thứ do chúng tôi đề xuất và phát triển đầu tiên. Điều đó phản ánh tính mới của đề tài.

### 4. Kết quả nghiên cứu

- Thu được 03 kết quả về một số dạng Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình. Đó là các Định lý 1.1.10, 1.1.11, 1.1.12. Ứng dụng Lý thuyết Nevanlinna, chúng tôi thu được 02 kết quả ước lượng hàm xấp xỉ của nghiệm phương trình  $q$ -dịch chuyển sai phân đạo hàm riêng và phân bố giá trị cho đa thức đạo hàm  $q$ -dịch chuyển sai phân nhiều biến.

- Thu được 02 kết quả về tính đa nghiệm, sự cô đặc của nghiệm cho phương trình kiểu Kirchhoff, Kirchhoff-Choquard chứa toán tử p-Laplace phân thứ mà hàm phi tuyến có độ tăng mũ, độ tăng dưới tới hạn. Đó là các Định lý 2.1.3 và 2.2.2.

- Thu được 01 kết quả về tính đa nghiệm chuẩn hóa, sự cô đặc của nghiệm cho một lớp phương trình Elliptic: Định lý 3.1.15. Tiếp theo chúng tôi thu được một số kết quả về sự tồn tại nghiệm và tính bùng nổ của nghiệm của phương trình truyền sóng chứa toán tử Laplace phân thứ trong  $\mathbb{R}^N$  mà hàm phi tuyến có độ tăng mũ kiểu Trudinger-Moser: Định lý 3.2.13, 3.2.18, 3.2.19 và 3.2.20.

## 5. Sản phẩm

### 5.1. Sản phẩm khoa học

- 05 Bài báo trong danh mục SCIE (04 bài thuộc lớp Q1 của Scimago, 01 bài thuộc lớp Q3 của Scimago), 01 bài tạp chí trong nước được HƣCDGS tính điểm:

(1) C.O. Alves and N.V. Thın (2023), "On existence of multiple normalized solutions to a class of elliptic problems in whole  $\mathbb{R}^N$  via Lusternik-Schnirelman category (Về sự tồn tại nhiều nghiệm chuẩn hóa cho một lớp bài toán Elliptic thông qua phạm trũ Lusternik-Schnirelman)", *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 55(2), 1264-1283, ISSN (print): 0036-1410 ISSN (online): 1095-7154, Q1.

<https://epubs.siam.org/doi/10.1137/22M1470694>.

(2) T. Boudjeriou and N.V. Thın (2024), "Asymptotics for a wave equation with critical exponential nonlinearity (Vấn đề tiệm cận cho phương trình truyền sóng với độ tăng tới hạn mũ)", *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 78, Article number: 104099, ISSN: 1468-1218, Q1.

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1468121824000397>.

(3) Y. Song, X. Sun, S. Liang and V. T. Nguyen (2024), "Multiplicity and Concentration Behavior of Solutions to a Class of Fractional Kirchhoff Equation Involving Exponential Nonlinearity (Về tính bội và sự cô đặc của nghiệm cho một lớp phương trình kiểu Kirchhoff phân thứ với độ tăng mũ)", *The Journal of Geometric Analysis* 34, Issue 9, article number 283, (2024), Print ISSN 1050-6926, Q1.

<https://link.springer.com/article/10.1007/s12220-024-01707-5>.

(4) S.S. Liang, S.H. Liang, S. Shi and N.V. Thın (2025), "On multiplicity and concentration of solutions for a fractional p-Laplace Choquard-Kirchhoff equations (Về tính bội và sự cô đặc của nghiệm cho phương trình kiểu Choquard-Kirchhoff chứa toán tử p-Laplace phân thứ)", *Advances in Differential Equations* 30, Numbers 1-2, 35-68, Print ISSN: 1079-9389, Q1.

[https://projecteuclid.org/journals/advances-in-differential-equations/volume-30/issue-1\\_2f\\_2](https://projecteuclid.org/journals/advances-in-differential-equations/volume-30/issue-1_2f_2).

(5) T. Cao, N. V. Thın, S. D. Quang (2024), "Difference analogues of the second main theorem for holomorphic curves and arbitrary families of hypersurfaces in projective varieties (Tương tự sai phân của Định lý cơ bản thứ hai và họ các siêu mặt tùy ý trong đa tạp xạ ảnh)", *Anal Math* 50, 757–785, ISSN: ISSN / eISSN: 0133-3852 / 1588-273X, Q3.

<https://link.springer.com/article/10.1007/s10476-024-00036-7>.

(6) P. T. Thuy and T. T. D Linh (2024), "q-difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative and some applications (Bổ đề q-sai phân tương tự của Bổ đề đạo hàm logarit và một số ứng dụng)", *TNU Journal of Science and Technology* 229(14), 35-42.

<https://jst.tnu.edu.vn/jst/article/view/10735>.

5.2. Sản phẩm đào tạo: 02 luận văn thạc sĩ đã bảo vệ thành công, hỗ trợ đào tạo 01 NCS đã

bảo vệ thành công.

+ Vũ Xuân Sang (2023), Dạng sai phân của Định lý cơ bản thứ hai cho ánh xạ phân hình vào đa tạp đại số giao với các siêu mặt ở vị trí dưới tổng quát, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

+ Nguyễn Anh Tuấn (2023), Sự tồn tại và độ tăng của nghiệm phân hình đối với phương trình sai phân phi tuyến, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

+ NCS Inthavichit Padaphet (2024), Về Định lý cơ bản thứ hai kiểu Cartan cho hàm đếm rút gọn và vấn đề duy nhất, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

## **6. Phương thức chuyển giao, địa chỉ ứng dụng, tác động và lợi ích mang lại của kết quả nghiên cứu**

### **6.1. Địa chỉ ứng dụng**

Các trường Đại học.

### **6.2. Tác động và lợi ích mang lại của kết quả nghiên cứu**

#### **6.2.1. Đối với lĩnh vực giáo dục và đào tạo**

Kết quả nghiên cứu của đề tài là tài liệu chuyên khảo cho sinh viên, học viên cao học, Nghiên cứu sinh chuyên ngành toán giải tích quan tâm đến phương trình đạo hàm riêng thứ. Đặc biệt bồi dưỡng khả năng nghiên cứu của các giảng viên trẻ, góp phần nâng cao chất lượng, hiệu quả đào tạo và nghiên cứu khoa học của Trường Đại học Sư phạm thuộc Đại học Thái Nguyên.

#### **6.2.2. Đối với lĩnh vực khoa học và công nghệ có liên quan**

Phương trình đạo hàm riêng thứ, phức có nhiều ứng dụng trong toán tài chính, mô hình sinh học, vật lý lượng tử,... Do đó các kết quả theo hướng nghiên cứu này góp phần thúc đẩy các lĩnh vực nghiên cứu liên quan.

## INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

### 1. General information

Project title: Some properties about solutions to differential equations, fractional partial differential equations

Code number: B2023-TNA-14

Coordinator: Dr. Nguyen Van Thin

Implementing institution: Thai Nguyen University

Duration: from 1/2023 to 12/2024

### 2. Objective(s)

- Develop Nevanlinna Theory for holomorphic functions and holomorphic curves. Namely, established some forms of the Second Main Theorem in Nevanlinna-Cartan Theory and studied the application of Nevanlinna-Cartan Theory in complex differential equations.
- Give some conditions for the existence of solutions, normalized solutions, concentration of solutions, as well as the blow up of solutions of some classes of partial differential equations containing non-local operators of the elliptic type.

### 3. Creativeness and innovativeness

- On the first topic about Nevanlinna theory for functions and holomorphic curves, we establish some forms of second main theorem for holomorphic curve and  $q$ -difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative. Apply that results, we study the approximated function of solutions to  $q$ -difference-partial differential equations in several variables and value distribution of  $q$ -difference-partial differential polynomials.
- On the second topic, we study the multiplicity and concentration of solutions, normalized solutions to Kirchhoff equation involving fractional  $p$ -Laplacian. We use variational method, Lusternik-Schnirelmann category theory, method on Nehari manifold, critical points theory. Special, it is the first time that Lusternik-Schnirelmann category theory is applied to study the multiple of normalized solutions for a class of Elliptic equation with nonnegative potential. We also study the existence and blow up of solution to wave equation which nonlinear reaction has Trudinger-Moser critical growth. Our problems are studied in the first time. Furthermore, we give the methods in studying the multiple solutions and blow up of solutions to wave equation involving fractional Laplace in  $\mathbb{R}$  with critical exponential growth. That shows the novelty of the project.

### 4. Research results

- Obtain three results on some forms of Second main theorem to holomorphic curves. They are Theorem 1.1.10, 1.1.11, 1.1.12. Apply that results, we obtain two theorem on approximated function of solutions to  $q$ -difference-partial differential equations and value distributions of  $q$ -difference-partial differential polynomials.
- Obtain two results about multiple and concentration of solutions to Kirchhoff, Kirchhoff-Choquard problem involving fractional  $p$ -Laplacian when nonlinear reaction has exponential

critical growth, subcritical growth, respectively. They are Theorem 2.1.3 and 2.2.2.

- Obtain one result about multiple of normalized solutions and concentration of solutions to Elliptic equation: Theorem 3.1.15. Next, we get some results on the existence and blow up solutions to wave equation involving fractional Laplacian in one dimension with exponential critical growth: Theorem 3.2.13, 3.2.18, 3.2.19 và 3.2.20.

## 5. Products

5.1. Scientific products published: 05 SCIE paper (04 paper belongs the class Q1 of Scimago, 01 papers belongs to the class Q3 of Scimago), 01 paper on domestic journal.

(1) C.O. Alves and N.V. Thin (2023), "On existence of multiple normalized solutions to a class of elliptic problems in whole  $\mathbb{R}^N$  via Lusternik-Schnirelman category", *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 55(2), 1264-1283, ISSN (print): 0036-1410 ISSN (online): 1095-7154, Q1.

(2) T. Boudjeriou and N.V. Thin (2024), "Asymptotics for a wave equation with critical exponential nonlinearity", *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 78, Article number: 104099, ISSN: 1468-1218, Q1.

(3) Y. Song, X. Sun, S. Liang and V. T. Nguyen (2024), "Multiplicity and Concentration Behavior of Solutions to a Class of Fractional Kirchhoff Equation Involving Exponential Nonlinearity", *The Journal of Geometric Analysis* 34, Issue 9, article number 283, (2024), Print ISSN 1050-6926, Q1.

(4) S.S. Liang, S.H. Liang, S. Shi and N.V. Thin (2025), "On multiplicity and concentration of solutions for a fractional p-Laplace Choquard-Kirchhoff equations", *Advances in Differential Equations* 30, Numbers 1-2, 35-68, Print ISSN: 1079-9389, Q1.

(5) T. Cao, N. V. Thin, S. D. Quang (2024), "Difference analogues of the second main theorem for holomorphic curves and arbitrary families of hypersurfaces in projective varieties", *Anal Math* 50, 757-785, ISSN: ISSN / eISSN: 0133-3852 / 1588-273X, Q3.

(6) P. T. Thuy and T. T. D Linh (2024), "q-difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative and some applications", *TNU Journal of Science and Technology* 229(14), 35-42.

5.2. Training products: 02 master theses successfully defended, 01 Ph. D thesis successfully defended:

+ Vũ Xuân Sang (2023), Difference analogue of second main theorem for meromorphic mapping into algebraic variety intersecting with hypersurfaces in subgeneral position, Thai Nguyen University of Education.

+ Nguyễn Anh Tuấn (2023), On the existence and growth of meromorphic solutions for nonlinear difference equation, Thai Nguyen University of Education.

+ Ph. D Inthavichit Padaphet (2024), On Second Main Theorem of Cartan type for reduced counting function and uniqueness problem, Thai Nguyen University of Education.

5.3. Application products

## 6. Transfer alternatives, application institutions, impacts and benefits of research results

## **6.1. Application institutions**

The universities

## **6.2. Impacts and benefits of research results**

### 6.2.1. For education and training fields

The research results of the project are monographs for students, graduate students, PhD students in analysis mathematics which are interested in fractional partial differential equations. Specially fostering research capabilities of young lecturers, contributing to improving the quality and efficiency of training and scientific research of Thai Nguyen University of Education.

### 6.2.2. For related science and technology fields

Fractional partial differential equations have many applications in financial math, biological modeling, quantum physics, .... The results in this direction that contribute to promoting related research areas.